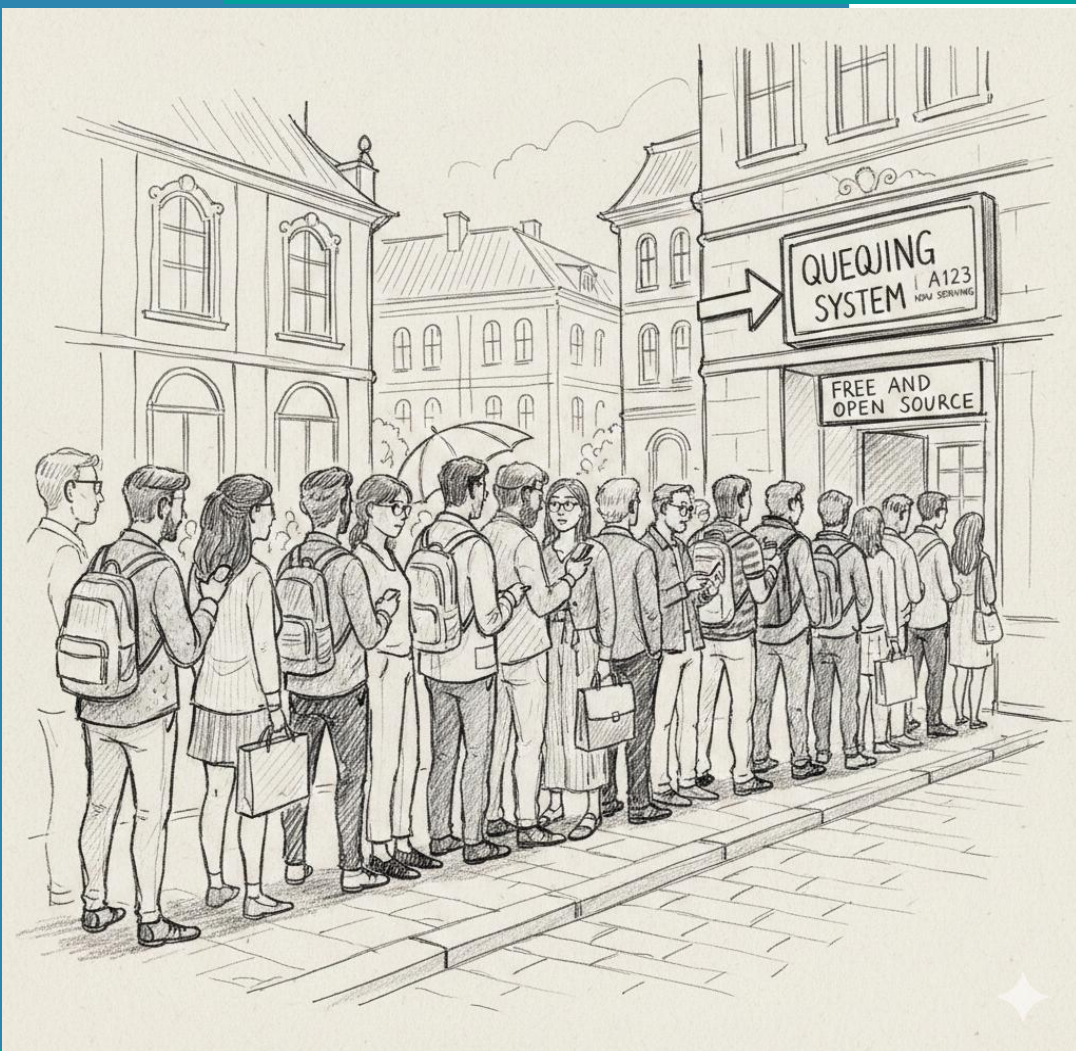




## ตัวแบบแถวคอย (Waiting Line or Queuing)

## ตัวอย่างแถวคอย

รอเครื่องดื่ม  
จากเครื่อง  
บริการ  
เครื่องดื่ม

---

การรอเพื่อซื้อ  
อาหาร

การรอเพื่อที่จะเล่น  
เครื่องเล่น

---

การรอเพื่อล้าง  
รถยนต์

การรอเติม  
น้ำมัน

---

การรอเพื่อ  
จ่ายเงินใน  
supermarket

การขึ้นลงของ  
เครื่องบินที่  
สนามบิน

---

การขนถ่าย  
สินค้า

- ความต้องการรับบริการ > บริการที่จัดไว้
- ทำไมบริการไม่เพียงพอ?
  - ไม่คุ้มค่าทางเศรษฐกิจ
  - ไม่มีพื้นที่
  - ไม่สามารถพยากรณ์จำนวนผู้เข้ารับบริการ

ทำไมต้องมีแถวคอย

คำถามที่น่าสนใจสำหรับลูกค้า

- นานเท่าไรที่ฉันต้องคอย?
- จำนวนคนในคิวมีมากน้อยเท่าไร?
- เมื่อไหร่ฉันจะได้รับบริการที่เร็วขึ้น?

# คำถามสำหรับการเตรียมตัวเพื่อให้บริการที่น่าสนใจ?



- พื้นที่ในแถวคอยต้องมากน้อยเท่าไร?
- จำนวนลูกค้าที่ออกจากแถวคอยโดยไม่รับบริการมากน้อยแค่ไหน?
- เราควรมีช่องทางบริการเพิ่มหรือไม่?
- ควรใช้ระบบคิดแบบไหน?
- ควรเตรียมระบบอย่างไรที่จะทำให้แถวคอยเร็วขึ้น?

ผู้จัดการต้องการคิวที่สั้นอย่างเพียงพอ  
เพื่อที่จะไม่ทำให้ลูกค้าไม่พอใจ

# พฤติกรรมลูกค้า



Patient

เข้ามาในแถวคอยและคอย  
จนกระทั่งได้รับบริการ



Reneging

ไม่สามารถทนรอได้และ  
ออกจากแถวคอยไป



Jockeying

อาจเปลี่ยนแถวจากแถว  
หนึ่งไปยังอีกแถวหนึ่ง



Balking

เมื่อมาถึงอาจไม่เข้า  
รับบริการเนื่องจากคิว  
ยาวเกินไป

# ทฤษฎีแถวคอย

วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่จะเสนอการวิเคราะห์แถวคอย

ต้นทุนรวมต่ำสุด :

ต้นทุนการรอคอยของลูกค้า

ต้นทุนเกี่ยวกับสมรรถนะ

ของการให้บริการ

จุดมุ่งหมาย

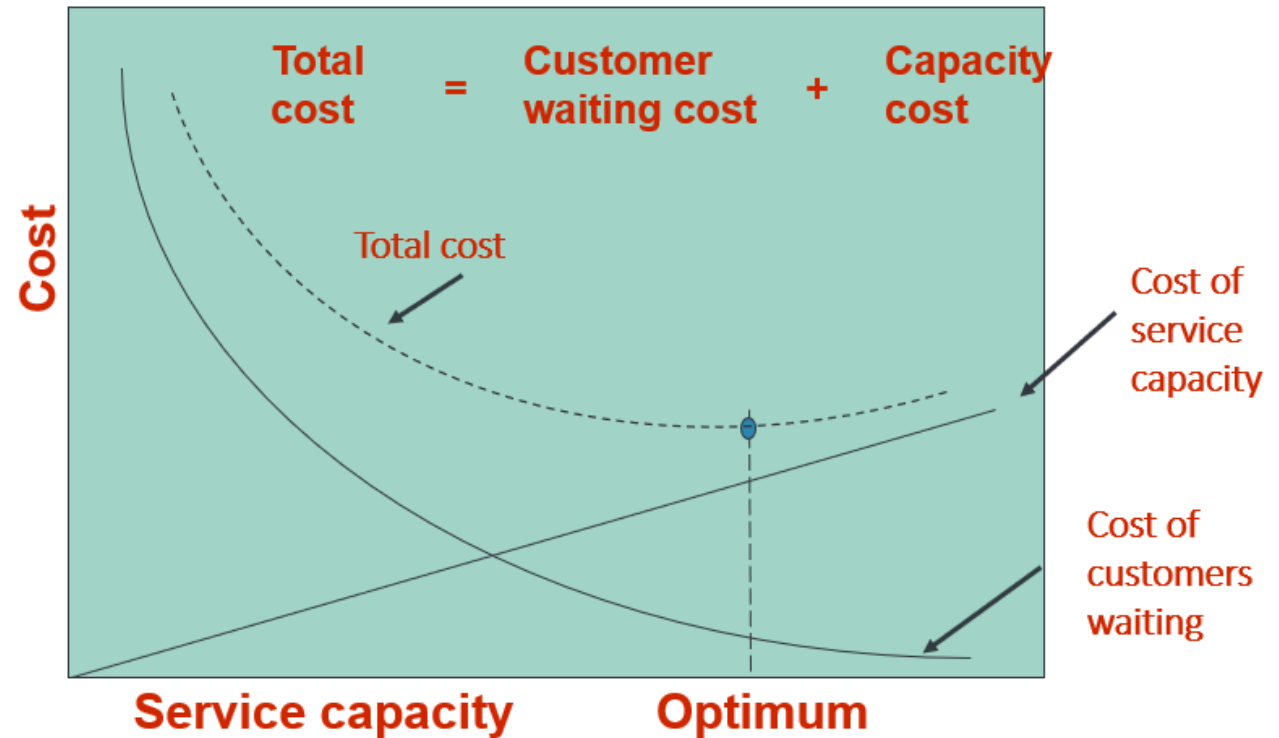
ตัวแบบแถวคอย

การอธิบายการดำเนินงานของระบบแถวคอยโดยแสดงข้อมูลเป็นตัวเลข ซึ่งนำไปช่วยในการวิเคราะห์ระบบและช่วยตัดสินใจในการบริหารจัดการแถวคอยเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพระบบ



## ส่วนประกอบเบื้องต้นสำหรับ กระบวนการแถวคอย

- การเข้ามา(Arrivals)
- ความสะดวกของการให้บริการ  
(Service facilities)
- แถวคอยในขณะนั้น(The actual  
waiting line)



# ลักษณะของระบบแถวคอย

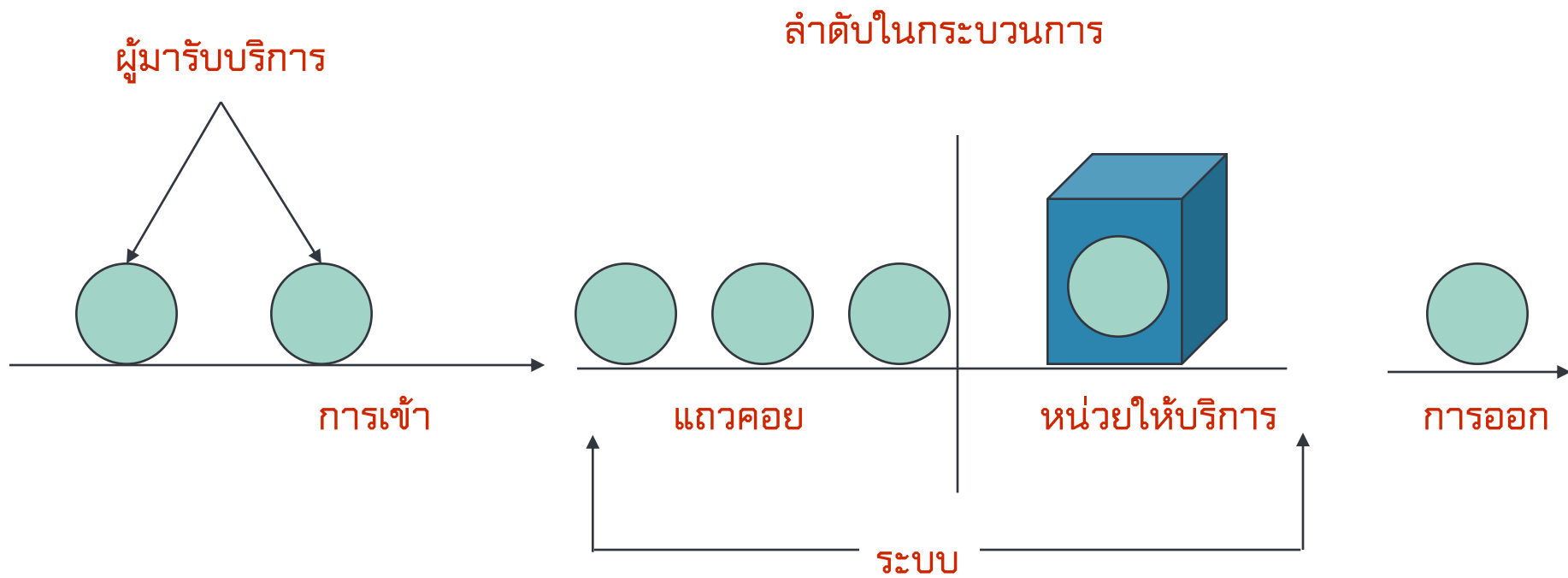
## ปัจจัยที่กำหนดลักษณะ

- ประชากรผู้เข้าใช้บริการ(ลูกค้า)(Population Source) ➡
  - ไม่จำกัด: ลูกค้าเข้ามาได้อย่างไม่จำกัด
  - จำกัด: จำนวนลูกค้าที่เป็นไปได้มีจำกัด
- จำนวนช่องทาง(Number of channels)
- รูปแบบของการเข้าและการให้บริการ(Arrival and service patterns)
- กฎระเบียบของคิวQueue discipline (order of service)

การเข้ามาแบบคงที่  
การเข้ามาแบบสุ่ม



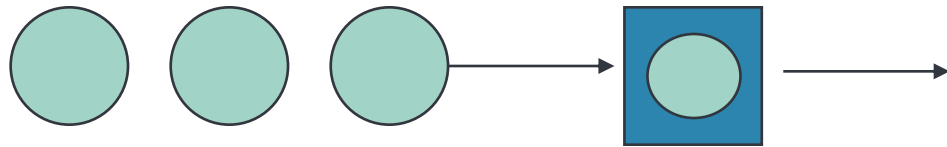
# ระบบแถวคอย



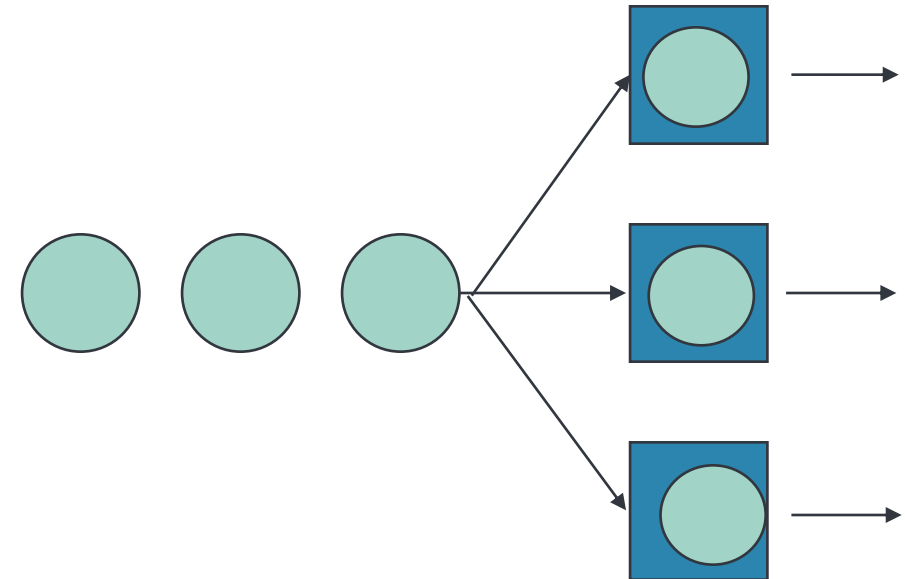
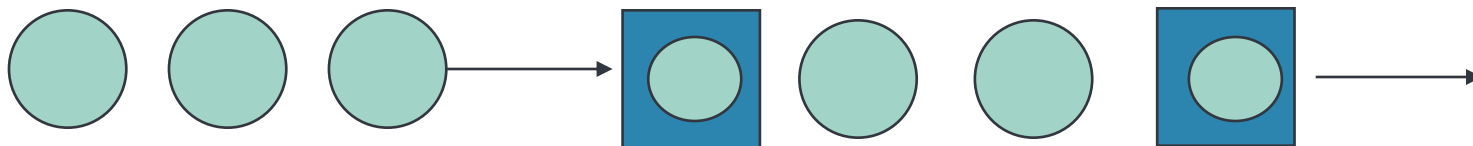
# แถวคอย

หลายช่องทาง ขั้นตอนเดียว

ช่องทางเดียวขั้นตอนเดียว

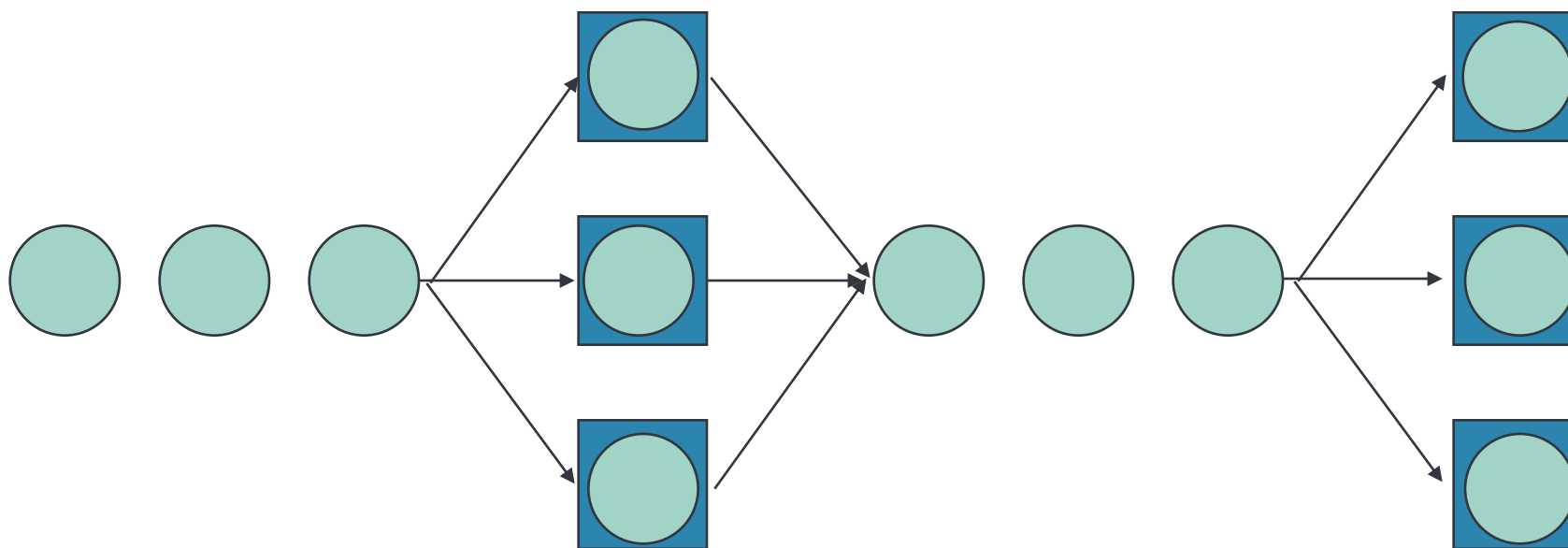


ช่องทางเดียวหลายขั้นตอน



# แถวคอย

หลายช่องทาง



หลายชั้นตอน

## การเก็บข้อมูลระบบแถวคอย

### ข้อมูลการเข้ารับบริการ

- อัตราการเข้ารับบริการ(arrival rate)
- เวลาเฉลี่ยระหว่างการเข้ารับบริการ (average interarrival time)
- พฤติกรรมการรอคอยของลูกค้า (สำหรับการวิเคราะห์จะสมมติให้ลูกค้าจะรอจนกว่าได้รับบริการ)

### ข้อมูลการให้บริการ

- อัตราการให้บริการ(service rate)  
ข้อมูลจำนวนลูกค้าที่ให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา
- เวลาในการให้บริการ(service time)  
เวลาที่ใช้ในการบริการลูกค้าแต่ละราย

# การแจกแจงความน่าจะเป็น

## การแจกแจงปัวซอง

(อัตราการเข้ารับบริการ หรืออัตราการให้บริการ)

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

x แทนจำนวนลูกค้าที่เข้ารับบริการในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง  
 $\lambda$  แทนอัตราการเข้ารับบริการ

## การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล

(เวลาระหว่างการเข้ารับบริการ หรือเวลาในการให้บริการหรืออัตราการให้บริการ)

$$P(\text{service time} > x) = e^{-\mu x}, x \geq 0$$

x แทนเวลาที่ให้บริการ  
 $\mu$  แทนอัตราการให้บริการ

# ตัวแบบแถวคอย

เคนดอลโนเตชัน(Kendall notation):

การออกแบบตัวอักษรเพื่ออธิบายลักษณะของตัวแบบแถวคอย

**A/B/C/K/N/D**

A: การแจกแจงความน่าจะเป็นของการมารับบริการ

B: การแจกแจงความน่าจะเป็นของการให้บริการ

ซึ่งจะใช้อักษรต่อไปนี้แทนการแจกแจง

M หมายถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง(ข้อมูลจำนวนลูกค้า)

หรือเอกซ์โปเนนเชียล(ข้อมูลเวลา)

D หมายถึงข้อมูลการให้บริการมีลักษณะคงที่

G หมายถึง การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทั่วไป

A/B/C/K/N/D

C: จำนวนช่องทางให้บริการ(channel) หรือ

จำนวนหน่วยบริการ(service facility)

K: ความยาวแถวคอย

N: จำนวนประชากร

ซึ่งจะใช้  $\infty$  แทนในตำแหน่ง K,N ในกรณีที่ไมจำกัดความยาวของแถวคอยหรือจำนวนประชากรมีจำนวนมากมาย

D: ระเบียบการให้บริการ

FCFS หมายถึง มาก่อนให้บริการก่อน

LCFS หมายถึง มาทีหลังให้บริการก่อน

SIRO หมายถึง ใช้การสุ่มในการให้บริการ(service in random order)



# สัญลักษณ์ที่ใช้ในคิวแบบ

$\lambda$  = อัตราการเข้ารับบริการ(จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่เข้ามาใช้บริการในหนึ่งหน่วยเวลา)

$\mu$  = อัตราการให้บริการ(จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่หน่วยให้บริการแต่ละหน่วยให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา)

$\frac{1}{\mu}$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการบริการลูกค้า 1 ราย

$\rho$

$\rho$  = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน

$P_0$  = ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$L_s$  = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

$L_q$  = จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบแถวคอย

$W_s$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในการรับบริการในระบบ

$W_q$  = เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนใช้ในการรออยู่ในแถวคอย

$P_n$  = ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า  $n$  คนในระบบ

# ตัวแบบแถวคอย

1.  $M/M/1$
2.  $M/M/s$
3.  $M/G/1$
4.  $M/D/1$
5.  $M/M/1$  กับประชากรที่จำกัด

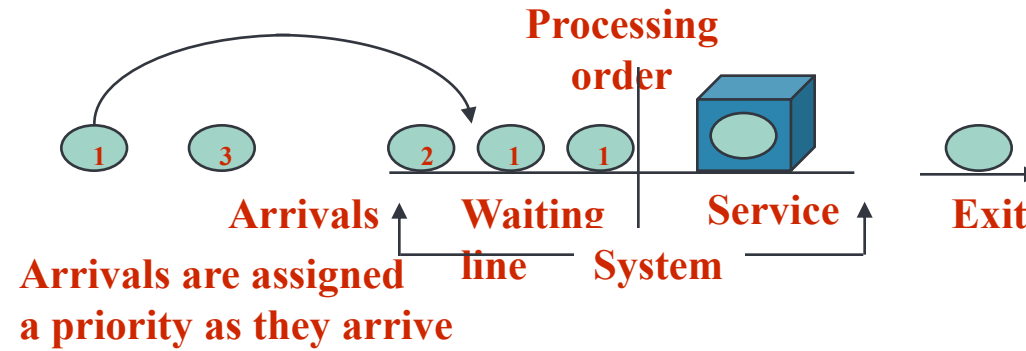
# ตัวแบบ M/M/1

สมมติฐานของตัวแบบ :  $\lambda < \mu$

## ระบบแถวคอย

- อัตราการเข้ารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง
- เวลาการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการเอกซ์โปเนนเชียล(หรืออัตราการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง)
- การให้บริการแบบช่องทางเดียวและขั้นตอนเดียว
- ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
- จำนวนประชากรมากมาย
- มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน

## สูตรคำนวณสำหรับ M/M/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$P_n = P_0 \rho^n$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \rho L_s$$

$$W_q = \rho W_s$$

## ตัวอย่างที่ 1

ตู้เอทีเอ็มของธนาคารแห่งหนึ่งมี 1 ตู้ ตั้งอยู่ในนิคมอุตสาหกรรม จากการเก็บข้อมูลในอดีตพบว่าลูกค้าเข้ามาใช้บริการแบบสุ่มเฉลี่ยชั่วโมงละ 25 ราย มีการแจกแจงความน่าจะเป็นปัวซอง ในขณะที่ลูกค้าแต่ละรายใช้เวลาอย่างน้อยต่างกันเฉลี่ยรายละ 1.5 นาที (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล) จงวิเคราะห์ระบบบริการของตู้เอทีเอ็ม

model : M/M/1

$$\rho = \frac{25}{40} = 0.625$$

$$P_0 = 1 - 0.625 = 0.375$$

$$\lambda = 25 \quad \text{รายต่อชั่วโมง}$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{25}{40 - 25} = 1.67$$

$$L_q = 0.625 \times 1.67 = 1.04$$

$$\mu = \frac{60}{1.5} = 40 \quad \text{รายต่อชั่วโมง}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{40 - 25} = \frac{1}{15}$$

$$W_q = \rho W_s = \frac{25}{40} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{24}$$

$$(\lambda < \mu)$$

สรุป โดยเฉลี่ยจะมีลูกค้าอยู่ในระบบ 1.67 คน และรอคอยเพื่อใช้ตู้เอทีเอ็ม 1.04 คน และต้องรอ 2 นาที 30 วินาที ต่อคนก่อนได้ใช้ตู้เอทีเอ็ม และโอกาสที่ตู้เอทีเอ็มจะไม่ว่างเท่ากับ 0.625

## ตัวอย่างที่ 2 M/M/1

มีตู้กดเงินหนึ่งตู้มีระยะเวลาห่างระหว่างการเข้ามาใช้บริการที่มีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลโดยมีค่าเฉลี่ย 10 นาที และเวลาใช้ในการบริการมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลโดยมีค่าเฉลี่ย 5 นาที มีแถวคอยไม่จำกัดความยาวและใครมาก่อนได้ใช้ก่อนจงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1.ความน่าจะเป็นที่คนใช้บริการไม่ต้องรอเป็นเท่าไร
- 2.จงหาค่าวัดดำเนินการ
- 3.บริษัทจะเพิ่มตู้บริการถ้าผู้รับบริการใช้เวลาคอยและเวลาใช้เวลาในการบริการรวมไม่ต่ำกว่า 15 นาที ดังนั้นอัตราคนเข้ามาใช้จะเพิ่มขึ้นเท่าใด

จากข้อมูล

$$\lambda = \frac{1}{10} \times 60 = 6 \quad \text{คนต่อชั่วโมง}$$
$$\mu = \frac{1}{5} \times 60 = 12 \quad \text{คนต่อชั่วโมง}$$
$$(\lambda < \mu)$$

## ตัวอย่างที่ 2 model M/M/1

จากข้อมูล

$$\lambda = 6, \mu = 12$$

1. ความน่าจะเป็นที่คนใช้โทรศัพท์ไม่ต้องรอ

คนเข้ามาใช้โทรศัพท์โดยไม่ต้องรอก็ต่อเมื่อไม่มีใครในแถวคอยและไม่มีใครกำลังใช้โทรศัพท์ นั่นคือระบบว่าง ความน่าจะเป็นที่ไม่ต้องรอคอยคือ

$$P_0 = 1 - \frac{6}{12} = 0.5$$

2. หาค่าวัดดำเนินการ

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{12 - 6} = 1 \quad W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12 - 6} = \frac{1}{6}$$

$$L_q = 0.5 \times 1 = 0.5 \quad W_q = \rho W_s = \frac{6}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

สรุป โดยเฉลี่ยจะมีลูกค้าอยู่ในระบบ 1 คน และรอคอยเพื่อใช้โทรศัพท์ 0.5 คน และต้องรอ 5 นาทีต่อคนก่อนได้ใช้โทรศัพท์ และโอกาสที่โทรศัพท์จะว่างเท่ากับ 0.5

## ตัวอย่างที่ 2 model M/M/1

3. บริษัทจะเพิ่มตู้บริการถ้าผู้รับบริการใช้เวลาคอยและเวลาใช้เวลาในการบริการรวมไม่ต่ำกว่า 15 นาที ดังนั้นอัตราคนเข้ามาใช้จะเพิ่มขึ้นเท่าใด

หา  $\lambda$  ที่ทำให้  $W_s \geq \frac{15}{60}$

$$\frac{1}{12 - \lambda} \geq \frac{1}{4}, \lambda \geq 8$$

อัตราคนเข้ามาใช้โทรศัพท์ควรเพิ่มขึ้นเป็น 8 คนต่อชั่วโมง

ต้องมีอัตราคนเข้าใช้โทรศัพท์อย่างน้อย 8 คนต่อชั่วโมง ซึ่งเดิมมีอัตราการเข้าใช้ 6 คนต่อชั่วโมง ดังนั้นอัตราคนเข้ามาใช้โทรศัพท์ต้องเพิ่มขึ้น 2 คนต่อชั่วโมงจึงจะติดตั้งโทรศัพท์เพิ่มหนึ่งตู้



### ตัวอย่างที่ 3 M/M/1

บริษัทส่งออกสินค้าประเภทเหล็กต้องการขนส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้าของบริษัท รถขนส่งจะมาส่งสินค้าโดยเฉลี่ยวันละ 1 คัน โดยคนงานจะขนส่งสินค้าจากรถบรรทุก ซึ่งคนงาน  $n$  คนจะขนส่งสินค้าได้  $0.8n$  คันรถต่อวัน ถ้าไม่มีการขนส่งสินค้าจากรถบรรทุกจะเสียค่าเสียหายวันละ 300 บาท ส่วนค่าจ้างคนงานขนของเป็น 105 บาทต่อวัน ทางบริษัทควรจะจ้างคนงานขนส่งสินค้ากี่คน ถ้ารถบรรทุกที่เข้ามาส่งสินค้ามีการแจกแจงปัวซอง

จากข้อมูล  $\lambda = 1$  คันต่อวัน

$\mu = 0.8n$  คันต่อวัน

ข้อตกลง  $\lambda < \mu$  จะได้ว่า  $n > 1.25$